Profesor:
Fortunato Mendoza

ARITMÉTICA

GRUPO PITÁGORAS

ESTADÍSTICA

ANÁLISIS COMBINATORIO Y PROBABILIDADES

ANÁLISIS COMBINATORIO

CONCEPTO

Es parte de la Aritmética que estudia los diversos arreglos o selecciones que podemos formar con los elementos de un conjunto dado

El Análisis Combinatorio también se define como una manera practica y abreviada de contar. Las operaciones o actividades que se presentan son de designadas como **eventos** o sucesos.

I. PRINCIPIOS

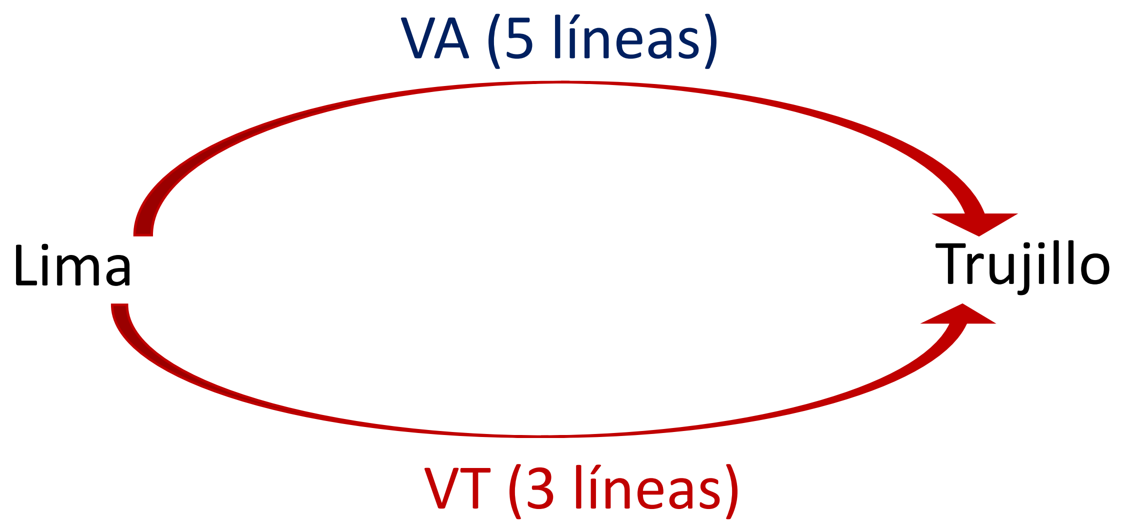
a) Principio de Adición:

Si un evento A puede realizarse de **m** maneras diferentes y otro evento B puede realizarse de **n** maneras distintas; no es posible que ambos eventos se realicen juntos ($A \cap B = \emptyset$) entonces la elección del evento A o B (en el sentido excluyente; o lo uno o lo otro) se puede realizar de (**m+n**) maneras diferentes.

Aplicación 1

Jorge desea viajar de Lima a Trujillo y tiene a su disposición 5 lineas aéreas y 3 lineas terrestres; ¿de cuántas maneras diferentes podrá viajar ?

Resolución:



Como ir por vía aérea e ir por vía terrestre son eventos mutuamente excluyentes

Por el principio de adición:

\# maneras = $5 + 3 = 8$

Rpta: 8

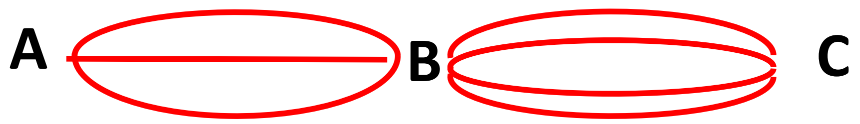
b) Principio de Multiplicación

Si un evento A puede efectuarse de **m** maneras diferentes y si después de cada una de éstas elecciones otro evento B puede realizarse de **n** maneras distintas; entonces la elección del evento A y B (simultáneamente o una a continuación de otra) se puede efectuar de (**m** x **n**) maneras diferentes.

Aplicación 2:

De una ciudad A a una ciudad B existen 3 caminos diferentes y de B a C existen 4 caminos distintos. Calcule de cuántas maneras diferentes Evelia podrá viajar de A a C pasando siempre por B.

Resolución:



Como ir de A a B y luego de B a C son eventos independientes

Por el principio de multiplicación: $\#\text{maneras} = 3 * 4 = 12$

Rpta: 12

II. PERMUTACIÓN

Se denomina así a los diferentes ordenamientos o arreglos con una parte o con todos los elementos de un conjunto. Dependiendo de los elementos y la forma de realizar los ordenamientos se clasifican en:

a) Permutación Lineal

Se denomina así a los ordenamientos o arreglos realizados en una línea de referencia.

Ejemplo:

Con las letras A, B y C; realice todos los ordenamientos de tres letras diferentes que se pueden realizar.

Resolución:

Ordenamientos: ABC; ACB; BAC;
BCA; CAB; CBA

Se obtienen: 6 ordenamientos
6 permutaciones

En general:

El número de permutaciones diferentes de **n** elementos distintos está determinado por:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Del ejemplo: $P_3 = 3! = 6$

Ejemplo:

Con las letras A, B y C, realice todos los ordenamientos de dos letras diferentes que se pueden realizar.

Resolución:

Letras: A; B; C

Ordenamientos de dos letras diferentes: AB; AC; BA; BC; CA; CB

Se obtuvieron: 6 ordenamientos

6 permutaciones

En general; el número de permutaciones diferentes de **n** elementos distintos tomados de **r** en **r** está dado por:

$$\boxed{P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

donde: $1 \leq r \leq n$

Del ejemplo: $P_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$

Aplicación 3:

En un concurso de matemática participan 5 alumnos, ¿de cuántas maneras distintas se puede dar la premiación; si no hay empates?

Resolución:

Alumnos: A; B; C; D; E

1° 2° 3° 4° 5°

A B C D E

A B C E D

B A C D E

.

.

.

#maneras = P_5 = 5! = 120

ANÁLISIS COMBINATORIO

Aplicación 4

En una competencia en el que participan 5 atletas, se entregarán medallas de oro, plata y bronce a los tres primeros en llegar a la meta. Si llegasen uno a continuación del otro;¿de cuántas maneras se puede efectuar la premiación?

Resolución:

Atletas: A; B; C; D; E

$$\left.\begin{array}{ccc} 1° & 2° & 3° \\ A & B & C \\ C & D & E \\ C & E & D \\ \vdots & & \end{array}\right\}$$

$$\#maneras = P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!}$$

$$\#maneras = 60$$

Otro Método:

Por el principio de multiplicación:

$$\#maneras = \underset{\underset{1°}{\uparrow}}{5} \times \underset{\underset{2°}{\uparrow}}{4} \times \underset{\underset{3°}{\uparrow}}{3}$$

$$\#maneras = 60$$

b) Permutación con repetición

Es un ordenamiento o arreglo de elementos, en los cuales algunos son de una misma clase.

Ejemplo:

Ordenar en fila las letras de la palabra AABBB

Resolución:

Ordenando:

$$\left.\begin{array}{l} A\ A\ B\ B\ B \\ B\ A\ A\ B\ B \\ B\ B\ A\ A\ B \\ B\ B\ B\ A\ A \\ A\ B\ A\ B\ B \\ B\ A\ B\ A\ B \\ B\ B\ A\ B\ A \\ A\ B\ B\ A\ B \\ B\ A\ B\ B\ A \\ A\ B\ B\ B\ A \end{array}\right\}\ \#\text{ ordenamientos} = 10$$

En general:

Si se tiene **n** elementos tales que hay

r_1 elementos repetidos de una misma clase;

r_2 elementos repetidos de una segunda clase

y así sucesivamente hasta

r_k elementos repetidos de una k-ésima clase;

el número de permutaciones diferentes está dado por:

$$\boxed{P^{n}_{(r_1;r_2;\ldots;r_k)} = \frac{n!}{r_1!.r_2!\ldots..r_k!}}$$

Del ejemplo:

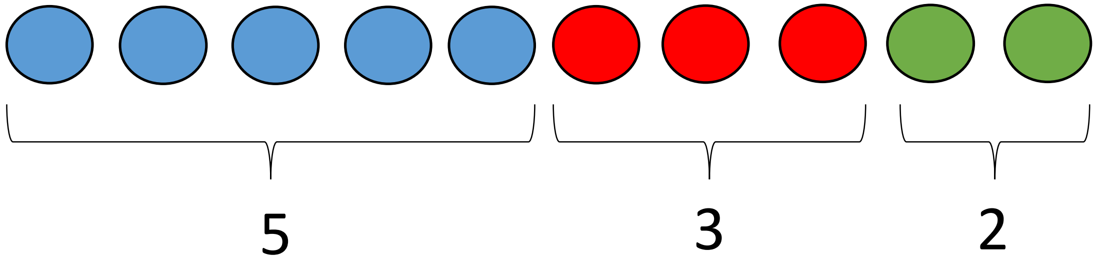
$$P^{5}_{(3;2)} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{6.2} = 10$$

Aplicación 5:

¿De cuántas maneras se puede ordenar en una fila 10 bolas del mismo tamaño, de las cuales 5 son azules, 3 son rojas y 2 verdes?

Resolución:

Se tiene:



Como se va a ordenar 10 bolas y hay algunos que se repiten

Estamos en el caso de permutación con repetición

#maneras = $P^{10}_{(5;3;2)} = \dfrac{10!}{5!3!2!} = \dfrac{5!6.7.8.9.10}{5!.6.2} = 2520$

c) Permutacion Circular

Es un ordenamiento o arreglo de los elementos alrededor de un objeto o punto de referencia (lo que hace suponer que todos ellos se encuentran en una linea imaginaria cerrada).Debido a esto no podemos decir cuál es el primer o el último elemento, y lo que se estila es hacer fijar uno de los elementos y tomarlo como referencia; así los demás elementos pueden permutarse de todas las formas posibles.

En general:

El número de maneras de ordenar **n** elementos diferentes dispuestos en forma circular está dado por:

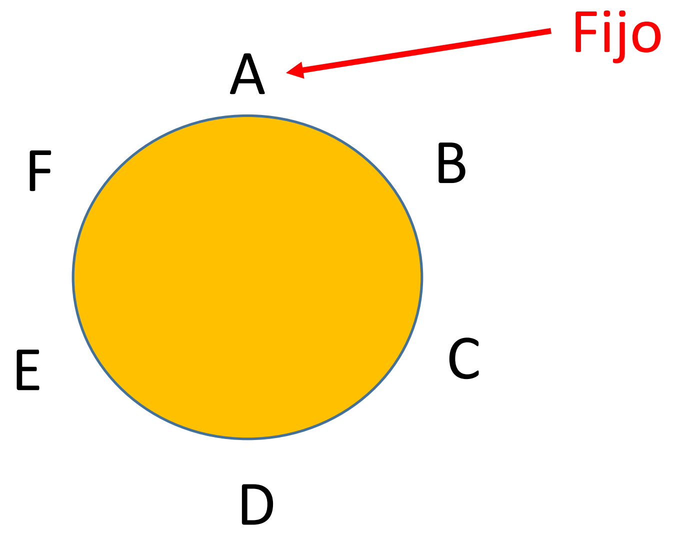
$$\boxed{P_{c(n)} = (n-1)!}$$

Aplicación 6:

¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar 6 personas alrededor de una mesa circular?.

Resolución:

Personas: A; B; C; D; E; F



maneras= 5! = 120

III. COMBINACIÓN

Se denomina así a los diferentes grupos que pueden formarse con todos o con parte de los elementos de un conjunto; sin considerar el orden de los elementos.

Ejemplo:

Con las letras A, B , C y D ; realice todas las agrupaciones de tres letras diferentes que se pueden realizar.

Resolución:

Letras: A; B; C y D

Agrupando:

A; B y C
A; B y D
A; C y D
B; C y D

4 agrupamientos
4 combinaciones

ANÁLISIS COMBINATORIO

En general:

El número de combinaciones diferentes de **n** elementos distintos tomados de **k** en **k** está dado por:

$$\boxed{C_k^n = \frac{n!}{k!.(n-k)!}}$$

Del ejemplo: $C_3^4 = \frac{4!}{3!.1!} = \frac{24}{6.1} = 4$

En forma práctica:

$$C_2^{10} = \frac{10.9}{2.1} = 45$$

$$C_3^{10} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 120$$

Aplicación 7:

De un total de 5 varones y 8 mujeres. Se pide:

a) ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de tres personas?

b) ¿De cuántas maneras se puede elegir un equipo de 2 varones y 3 mujeres?

Resolución:

Total: 5V y 8M

a) Comité : 3 personas

#maneras = $C_3^{13} = \dfrac{13.12.11}{3.2.1}$ = 286

b) Equipo : 2V y 3M

#maneras =$C_2^5\ C_3^8 = 10.56$ = 560

COMBINACIÓN CON REPETICIÓN

Se denomina así al número de maneras en que se puede escoger un grupo de objetos (distintos o no) de un total de objetos dados.

En general

En general, si se tienen objetos de **n** tipos diferentes, entonces el número de grupos de **k** elementos que podemos formar, pudiéndose repetir elementos se calcula así:

$$\boxed{CR_k^n = C_k^{n+k-1}}$$

Aplicación:

¿De cuántas maneras diferentes se pueden comprar 7 refrescos, en una tienda donde lo ofrecen en 4 sabores diferentes (limón, naranja, manzana y pera) sin mezclarlos?

Resolución:

Como se tiene refrescos de 4 sabores diferentes: n=4

Como se va a comprar 7 refrescos: k=7

Como se va a elegir un grupo de 7 refrescos y los refrescos pueden repetirse, entonces estamos en un caso de combinación con repetición

maneras = CR_7^4 $=C_7^{4+7-1}$ = C_7^{10} = C_3^{10} = $\frac{10.9.8}{3.2.1}$ = 120

PROBABILIDAD

I. CONCEPTOS PREVIOS

a) Experimento Aleatorio

Es toda prueba o ensayo cuyos resultados no pueden predecirse sin realizar previamente la prueba, ya que consta con más de un resultado posible.

b) Espacio Muestral

Es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

c) Evento o suceso

Es cualquier subconjunto de un espacio muestral. Se denota con las primeras letras del alfabeto.

Ejemplo:

ε: Lanzar un dado parta anotar el puntaje obtenido en la cara superior.

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Sea el evento A: "Obtener puntaje impar"

Entonces : $A = \{1; 3; 5\}$

II. CLASES DE EVENTOS

a) Evento imposible

Es aquel suceso que nunca va a ocurrir.

b) Evento seguro(Ω)

Es aquel suceso que siempre va a ocurrir.

c) Evento complementario

El suceso complementario de A:

$$\bar{A} = A^C = \Omega - A$$

PROBABILIDADES

III. OPERACIONES ENTRE SUCESOS

* $A \cup B$: Ocurre A, ocurre B o ambos; Ocurre al menos uno de ellos
* $A \cap B$: Ocurre A y ocurre B; Ocurre ambos a la vez
* $A - B$: Ocurre solamente A; Ocurre A pero no B
* $\bar{A}$: No ocurre A
* $A \cap \bar{B}$: Sólo ocurre A; ocurre A pero no B
* $A \cap \bar{B} + B \cap \bar{A}$: Sólo ocurre uno de los sucesos

IV. DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

Si A es un suceso de un espacio muestral Ω , entonces la probabilidad de ocurrencia de A se denota por P[A] y está dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\#casos\ favorables}{\#casos\ posibles}$$

Aplicación 8:

Si se lanza un dado; ¿Cuál es la probabilidad de obtener un numero par mayor que 2?

Resolución:

$\mathcal{E}: Se\ lanza\ un\ dado$

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$Sea\ A = \{4; 6\}$

Piden P(A) = $\frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

PROBABILIDADES

Aplicación 9:

Se tiene una baraja de 52 cartas y de ellas se extrae 2 cartas. Hallar la probabilidad de que las cartas sean de espadas:

Resolución:

Se tiene:

Se extrae 2 cartas

13 E
13 T
13 C
13 D

Sea A : Se extraen 2 cartas de espadas

Piden: $$P(A) = \frac{\#cf}{\#cp} = \frac{C_2^{13}}{C_2^{52}} = \frac{\frac{13.12}{2.1}}{\frac{52.51}{2.1}} = \frac{13.12}{52.51} = \frac{1}{17}$$

PROBABILIDADES

Propiedades:

1. Se cumple $0 \leq P(A) \leq 1$

2. Se A un evento y su complemento $\bar{A}$, se cumple:

$$\boxed{P(A) = 1 - P(\bar{A})} \qquad \boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

3. Si A es un evento imposible: $P(A) = P(\phi) = 0$

4. Si A es un evento seguro: $P(A) = P(\Omega) = 1$

Eventos mutuamente excluyentes

Se dice que A y B son eventos mutuamente excluyentes cuando ambos no pueden ocurrir a la vez, entonces se cumple que:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

donde $P(A \cup B)$: probabilidad de que ocurra A o B.

Aplicación 10:

Una bola se extrae al azar de una caja que contiene 4 verdes, 5 bolas celestes y 2 bolas rojas. Determinar la probabilidad de que sea verde o roja.

Resolución

Se tiene:

Se extrae 1 bola

4V
5C
2R

Sea A: La bola sea verde
B: La bola sea roja

Piden: $P(A \cup B)$

Como A y B son mutuamente excluyentes

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cup B) = \frac{4}{11} + \frac{2}{11}$

$P(A \cup B) = \frac{6}{11}$

Nota:

Cuando dos eventos A y B no son mutuamente excluyentes, es decir pueden ocurrir a la vez, se cumple:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Aplicación 11:

La probabilidad de que Carlos estudie aritmética es 0,75 y la probabilidad de que estudie álgebra es 0,50. Si la probabilidad de que estudie aritmética o álgebra es 0,85. ¿Cuál es la probabilidad de que estudie ambos cursos a la vez?

Resolución:

$P(A) = 0{,}75$; $P(X) = 0{,}50$; $P(A \cup X) = 0{,}85$ Piden : $P(A \cap X)$

Se cumple: $P(A \cup X) = P(A) + P(X) - P(A \cap X)$

$$0{,}85 = 0{,}75 + 0{,}50 - P(A \cap X)$$

$$P(A \cap X) = 0{,}40$$

Eventos Independientes

Se dice que dos eventos son independientes cuando
la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia de otro, entonces se cumple que:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

donde $P(A \cap B)$: probabilidad de que ocurra A y B.

Aplicación 12:

Calcular la probabilidad de obtener sello al lanzar una moneda, y un puntaje impar al lanzar un dado.

Resolución:

Sea A: Se obtiene sello al lanzar una moneda

B: Se obtiene puntaje impar al lanzar un dado

Piden $P(A \cap B)$

Como A y B son eventos independientes, se cumple:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} * \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

PROBABILIDADES

Nota:

Cuando dos eventos A y B no son independientes:

$$\boxed{P(A\cap B) = P(A) \times P(B/A)}$$

donde P(B/A): probabilidad de que ocurra B, dado que ya ocurrió el evento A.

Aplicación 10:

Se extrae 2 bolas una por una sin reposición de una caja que contiene 4 verdes, 5 bolas celestes y 3 bolas rojas. Determinar la probabilidad que la primera sea verde y la segunda se roja

Resolución

Se tiene:

Se extrae 2 bolas (sin reposición)

4V
5C
3R

Sea A: La 1ra bola sea verde
B: La 2da bola sea roja

Piden: $P(A\cap B)$

Como B depende de A

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

$$P(A\cap B) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11}$$

$$P(A\cap B) = \frac{1}{11}$$

VIII. PROBABILIDAD CONDICIONAL

Es la probabilidad de ocurrencia de B ya que ocurrió A y se denota por P(B/A) y se calcula:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo:

Al lanzar un dado, si el resultado es par, ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor que 3?

Resolución:

$\mathcal{E}$: Se lanza un dado

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$Sea\ A = \{2;\ 4;\ ; 6\}$

$B = \{\ 4; 5; 6\}$

Piden $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Observación: $A \cap B = \{\ 4; 6\}$

$$P(B/A) = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

VARIABLE ALEATORIA

Sea ε un experimento aleatorio y Ω el espacio muestral asociado a este experimento. Se llama variable aleatoria a toda aplicación del espacio muestral Ω en el conjunto de los números reales (es decir, asocia a cada elemento de Ω un número real).

Ejemplo:

Consideremos el experimento de lanzar una moneda 2 veces y sea la variable aleatoria x determinada por el número de caras que salen.

$\Omega = \{cc; cs; sc; ss\}$ donde c: cara ; s: sello

asignamos a cada elemento del espacio muestral el numero de caras obtenidas

$$\Omega = \{\underset{\downarrow\ 2}{cc};\ \underset{\downarrow\ 1}{cs};\ \underset{\downarrow\ 1}{sc};\ \underset{\downarrow\ 0}{ss}\}$$

Luego

$\boldsymbol{X_i}$	**0**	**1**	**2**
P(x_i)	1/4	2/4	1/4

Donde a P(x_i) se le llama función de probabilidad o distribución de probabilidad :
Se cumple que:

I.- $P(x_i) \geq 0 \; ; \forall \, i = 1; 2; 3; \ldots; n$

II.- $\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1}$

ESPERANZA MATEMATICA(E(x))

La esperanza matemática (o simplemente esperanza) o valor esperado de una variable aleatoria finita X, que toma los valores: $x_1; x_2; x_3; \ldots, x_n$ con las probabilidades: $p(x_1)$; $p(x_2)$; $p(x_3)$;…;$p(x_n)$ respectivamente, se calcula como:

$$\boxed{E(X) = \sum_{i-1}^{n} x_i . p(x_i)}$$

Del ejemplo:

$$E(X) = 0.\frac{1}{4} + 1.\frac{2}{4} + 2.\frac{1}{4} = 1$$

MOMENTO DE PRACTICAR

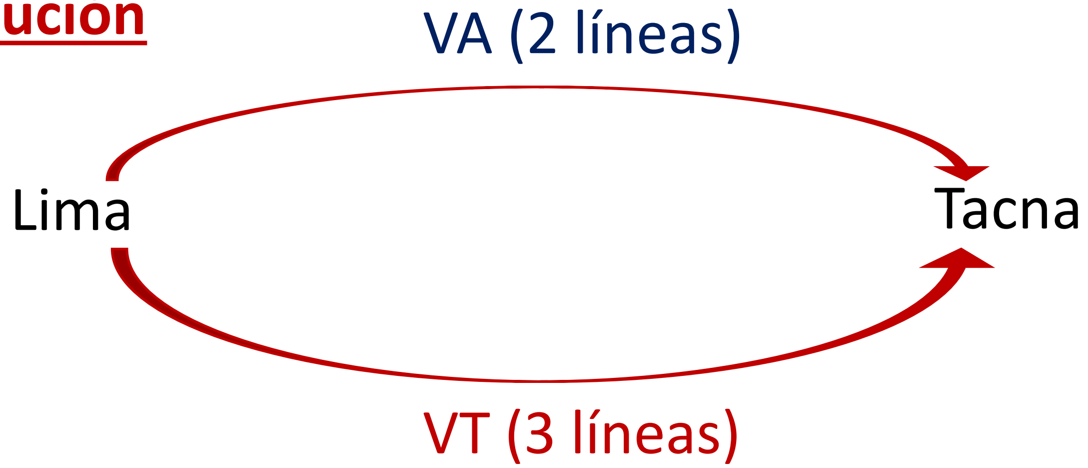
PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

1. Thalía desea viajar de Lima a Tacna. Si por vía aérea existen dos líneas cada una con 5 salidas diarias y por vía terrestre tres líneas que salen cada 2 horas, ¿de cuántas maneras diferentes puede realizar su viaje Thalía en 1 día?

A) 26 **B) 36** **C) 46**

D) 56 **E) 66**

Resolución



Por vía aérea cada línea sale 5 veces al día

Por vía terrestre cada línea sale 12 veces al día

maneras = $2 * 5 + 3 * 12 = 46$

Clave: C

PROBLEMAS

2.

a. ¿Cuántos comités de 4 personas se pueden formar con un grupo de 12 personas, de tal modo que la comisión tenga un presidente, un secretario, un tesorero y un vocal?

b. Si sobre un mesa se encuentran 12 bolas, de las cuales 6 son blancas, 4 son negras y las restantes de color rojo, ¿de cuántas maneras diferentes se puede colocar dichas bolas en fila?

A) 11 800 - 13 800

B) 11 880 - 13 860

C) 11 800 - 13 860

D) 11 880 - 13 800

E) 11 880 - 13 680

PROBLEMAS

Resolución

a) Total: 12 personas

Comité: 4 $\rightarrow$ P; S; T; V

Por el principio de multiplicación

$$\# \text{ maneras} = \underset{12}{\overset{P}{\downarrow}} * \underset{11}{\overset{S}{\downarrow}} * \underset{10}{\overset{T}{\downarrow}} * \underset{9}{\overset{V}{\downarrow}}$$

#maneras = 11880

b) Se tiene:

$$\underbrace{B\ B\ B\ B\ B\ B}_{6}\quad \underbrace{N\ N\ N\ N}_{4}\quad \underbrace{R\ R}_{2}$$

Como se van a ordenar en fila y hay elementos que se repiten

Estamos en un caso de permutación con repetición

$$\# \text{ maneras} = \frac{12!}{6!4!2!} = \frac{6! * 7 * 8 * 9 * 10 * 11 * 12}{6! * 24 * 2}$$

maneras = 13860

Rpta: 11880 y 13860 **Clave: B**

3. ¿De cuántas formas diferentes se pueden ordenar alrededor de una mesa circular 7 hombres y 7 mujeres, si no deben haber hombres juntos?

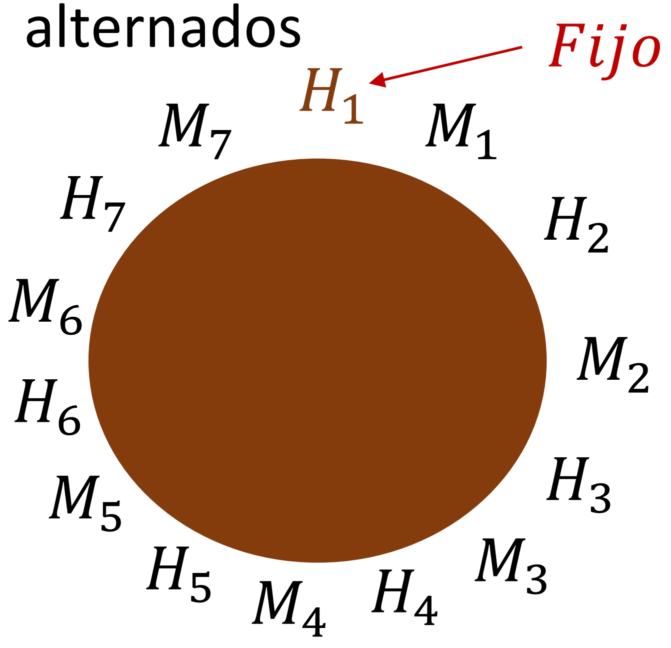
A) 3 628 800 **B) 4 105 728** **C) 7 462 800**

D) 5 803 200 **E) 5 474 304**

Resolución

Estamos en el caso de permutación circular

Como no deben haber dos hombres juntos, entonces los hombres y mujeres deben estar alternados



Tomando un elemento fijo

Para que los hombres y mujeres estén alternados, los hombres se permutan entre ellos y las mujeres se permutan entre ellas

$$\# \text{ maneras} = 6!\,.\,7!$$

$$\# \text{ maneras} = 3628800$$

Clave: A

4. En una reunión hay 9 varones y 7 mujeres. Si se debe formar una delegación de 5 miembros, ¿de cuántas maneras puede formarse la delegación que al menos incluya 2 mujeres?

A) 3 360 **B) 4 032** **C) 4 024**

D) 3 024 **E) 3 096**

Resolución

Total : 9V y 7M

$$\text{Delegación: 5 personas} \begin{cases} 3V \ y \ 2M \\ 2V \ y \ 3M \\ 1V \ y \ 4M \\ 5M \end{cases}$$

Como una delegación es un grupo, estamos en el caso de una combinación

$$\# \text{ maneras} = C_3^9 C_2^7 + C_2^9 C_3^7 + C_1^9 C_4^7 + C_5^7$$

$$\# \text{ maneras} = 84 \,.\, 21 + 36 \,.\, 35 + 9 \,.\, 35 + 21$$

$$\# \text{ maneras} = 3360$$

Clave: A

PROBLEMAS

5. Se tiene 10 vacunas, de las cuales 3 se encuentran en mal estado. Si se prueba una a continuación de otra y en la séptima prueba se logró determinar a la tercera vacuna mala, ¿de cuántas formas se pudieron haber hecho las pruebas?

A) 28 **B) 18** **C) 20**

D) 15 **E) 30**

Resolución

Se tiene: $\underbrace{B\ B\ B\ B\ B\ B\ B}_{\text{Buenas}}\ \underbrace{M\ M\ M}_{\text{Malas}}$

Observación: del 1° al 6° estamos ordenando 6 elementos con repetición

	1° ....6°	7°
Pruebas	M M B B B B	M
	M B M B B B	M
	B M B M B B	M
	.	.
	.	.
	.	.

FIJO

Por cada ordenamiento es una manera de hacer la prueba, luego:

$$\#\,maneras = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

Clave: D

6. Sofía invita a 15 amigos para la fiesta de sus 15 años. Si entre las 15 personas hay dos matrimonios y cada pareja asisten juntos a cualquier reunión, ¿de cuántas maneras pueden llegar sólo 6 amigos a la fiesta?

A) 1 177 **B) 1 178** **C) 1 179**

D) 1 180 **E) 1 181**

Resolución

Total : 15 amigos $\begin{cases} 1^{er}\,Matrimonio: A\ y\ B \\ 2^{do}\,Matrimonio: C\ y\ D \\ 11\ amigos\ mas \end{cases}$

Invita a 6 amigos

1° Forma: $1^{er}\,Matrimonio$ y 4 amigos mas ➡ $\#\ maneras = C_4^{11} = 330$

2° Forma: $2^{do}\,Matrimonio$ y 4 amigos mas ➡ $\#\ maneras = C_4^{11} = 330$

3° Forma: Los dos matrimonios y 2 amigos mas ➡ $\#\ maneras = C_2^{11} = 55$

1° Forma: $Ningún\ matrimonio$ ➡ $\#\ maneras = C_6^{11} = 462$

$Por\ lo\ tanto:\ \#\ total\ de\ maneras = 330 + 330 + 55 + 462 = 1177$

Clave: A

PROBLEMAS

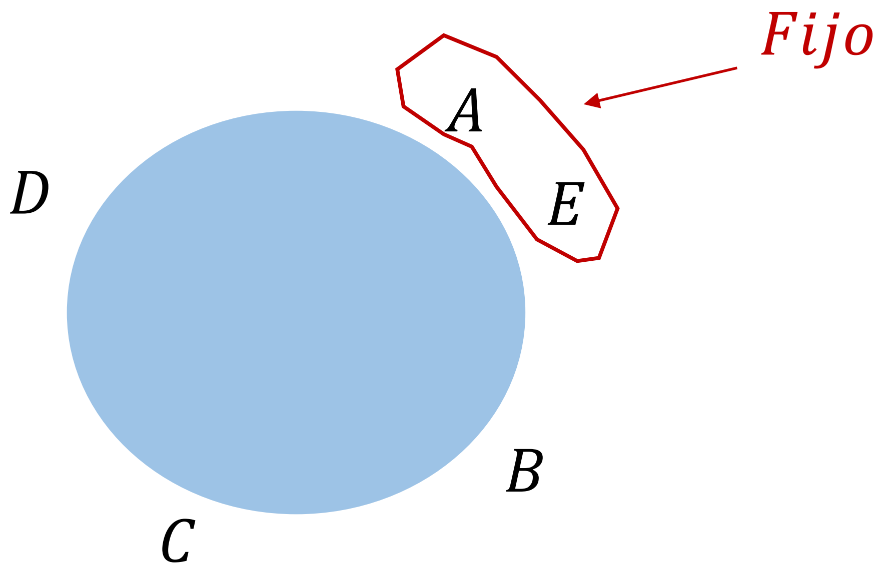
7. En una heladería donde venden helados de 4 sabores diferentes, 5 hermanos compran uno de cada uno. Si se ubican alrededor de una mesa donde el menor y el mayor siempre están juntos, calcule de cuántas formas pueden realizarse dichas ordenaciones.

A) 36 **B) 12** **C) 48** **D) 24** **E) 38**

Resolución

Hermanos: A ; B ; C ; D ; E

$\downarrow$ Menor (A) $\downarrow$ Mayor (E)



$$\# \text{ maneras} = 3!\,.\,2!$$

$$\# \text{ maneras} = 6\,.\,2 = 12$$

Clave: B

8. ¿De cuántas maneras diferentes se puede representar el número 12 como la suma indicada de 5 sumandos enteros no negativos y no necesariamente diferentes?

A) 3 360 **B) 2 184** **C) 3 276**
D) 3 640 **E) 1 820**

Resolución

Por dato:

$x + y + z + w + r = 12$, donde x ; y ; z ; w; r $\in \{0; 1; 2; \ldots \ldots\}$

$1 + 2 + 3 + 4 + 2 = 12 \Rightarrow . + . . + \ldots + \ldots . + . .$

$2 + 1 + 3 + 4 + 2 = 12 \Rightarrow . . + . + \ldots + \ldots . + . .$

$3 + 0 + 1 + 0 + 8 = 12 \Rightarrow . . + + . + + \ldots \ldots . .$

.
.
.

Observación:

En cada solución tenemos la permutación de 16 elementos de los cuales 12 son idénticos (puntos) y otros 4 también son idénticos (+)

$$\# \, soluciones = \frac{16!}{12!\,4!} = \frac{12!\,.\,13\,.\,14\,.\,15\,.\,16}{12!\,.\,24}$$

$$\# \, soluciones = 1820$$

Clave: E

9. Seis varones y dos mujeres desean viajar en 4 motos diferentes (dos por moto). Si de ellos 4 varones y las mujeres saben conducir una moto, ¿de cuántas maneras diferentes pueden viajar? Considere que cuando maneja una mujer ningún varón la quiere acompañar.

A) 1 728 **B) 1 296** **C) 1 560**

D) 1 960 **E) 1 456**

Resolución

Varones: A ; B ; C ; D ; E ; F

Mujeres: X ; Y

Saben conducir: A; B ; C ; D ; X ; Y

1°Forma: Manejan los 4 varones

E	F	X	Y	
A	B	C	D	➡ Manejan

$\# \, maneras = 4!\,4!$ = 24 . 24 = 576

2°Forma: Manejan los 3 varones y 1 mujer

D	E	F	Y	
A	B	C	X	➡ Manejan

$\# \, maneras = C_3^4 \,.\, C_1^2 \,.\, 4!\,.3!$ = 4 . 2 . 24 . 6 = 1152

$Por\ lo\ tanto\ \#\ total\ de\ maneras\ = 576 + 1152$

$\#\ total\ de\ maneras\ = 1728$

Clave: A

10. En una aula de 25 mujeres y 10 varones se pretende elegir un delegado, un subdelegado y dos suplentes (1º y 2º). ¿De cuántas maneras se podrá elegir de modo que los suplentes sean varones, y mujeres delegado y subdelegado?

A) 27 000 **B) 54 000** **C) 48 000**

D) 24 000 **E) 36 000**

Resolución

Total: 25M y 10V

Se desea elegir: $\underbrace{\text{D} \quad \text{SD}}_{\text{Mujeres}} \quad \underbrace{S_1 \quad S_2}_{\text{Varones}}$

Por el principio de multiplicación

$$\begin{array}{cccc} \text{D} & \text{SD} & S_1 & S_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

maneras = 25 * 24* 10 * 9

#maneras = 54000

Clave: B

PROBLEMAS

11. A una señora embarazada le diagnostican trillizos. ¿Cuál es la probabilidad que el día del parto nazcan tres hombres?

A) 1/2 **B) 1/4** **C) 1/8**

D) 1/16 **E) 1/3**

Resolución

Como le diagnosticaron trillizos

Casos posibles

1°	2°	3°
H	H	H
M	M	M

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Casos favorables

1°	2°	3°
H	H	H

$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Piden: $P_{(tres\ hombres)} = \dfrac{\#cf}{\#cp} = \dfrac{1}{8}$

Clave: C

12. En una fila se ubican doce amigas, pero dos de ellas no se hablan y no quieren estar juntas. ¿Cuál es la probabilidad para que se cumpla esta condición?

A) 2/7 B) 1/6 C) 3/5 D) 2/3 E) 5/6

Resolución

Amigos: $A_1; A_2; A_3; \ldots; A_{12}$

A_1 y A_2: no se hablan y no quieren estar juntos

Sea A : Se ubican en una fila donde A_1 y A_2 no estén juntas:

Luego $\bar{A}$: Se ubican en una fila donde A_1 y A_2 estén juntas

Piden: $\mathrm{P(A)} = 1 - \mathrm{P}(\bar{A}) \ldots\ldots (1)$

$$\underbrace{\boxed{A_1 \ A_2}}_{Juntas} A_3 \ldots\ldots A_{12} \rightarrow \mathrm{P}(\bar{A}) = \frac{\#cf}{\#cp} = \frac{11!\,2!}{12!} = \frac{1}{6}$$

En (1) $\mathrm{P(A)} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Clave: E

13. Se tiene una bolsa con 9 bolas numeradas del 1 al 9. Se extrae una bola de la bolsa, se anota el número y se reintegra a la bolsa. Si se consideran los sucesos:

A = {x/x es un número primo}

B = {n/n es un múltiplo de 3}

calcular P(A ∪ B)

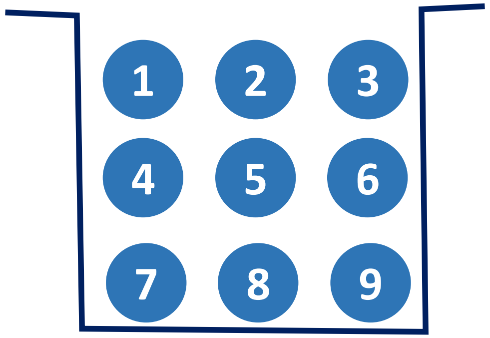
A) 1/9 **B) 1/3** **C) 4/9**

D) 5/9 **E) 2/3**

Resolución

Se tiene:

Se extrae 1 bola



$\Omega = \{1; 2 ; 3; 4 ; 5; 6 ; 7; 8; 9\}$

$A = \{2 ; 3 ; 5 ; 7\}$

$B = \{3 ; 6 ; 9\}$

Obs: $A \cap B = \{3\}$

Piden:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \dfrac{4}{9} + \dfrac{3}{9} - \dfrac{1}{9}$

$P(A \cup B) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

Clave: E

PROBLEMAS

14. La probabilidad que Salcedo anote un gol al patear un penal es 0,45. ¿Cuál es la probabilidad de que anote por lo menos un gol al patear tres penales?

A) 0,556 **B) 0,666** **C) 0,775**

D) 0,834 **E) 0,888**

Resolución

Dato: P(G) = 0,45 ➡ $P(\bar{G}) = 0{,}55$

Como pateará 3 penales

Piden:

$P(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = 1 - P(\overline{G_1 \cup G_2 \cup G_3})$

$P(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = 1 - P(\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 \cap \bar{G}_3)$

Obs: G_1; G_2 y G_3 son eventos independientes

➡ $\overline{G_1}$; $\overline{G_2}$ y $\overline{G_3}$ también son eventos independientes

Luego:

$P(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = 1 - P(\overline{G_1}) \,.\, P(\overline{G_2}) \,.\, P(\overline{G_3})$

$P(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = 1 - (0{,}55)(0{,}55)(0{,}55)$

$P(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = 0{,}834$ **Clave: D**

PROBLEMAS

15. En un sorteo la probabilidad de ganar el premio A es 0,05 y la probabilidad de ganar el premio B es 0,25. Si la probabilidad de ganar al menos uno de los dos premios es 0,28, ¿cuál es la probabilidad de ganar sólo uno de los 2 premios?

A) 0,24 **B) 0,25** **C) 0,26**

D) 0,27 **E) 0,275**

Resolución

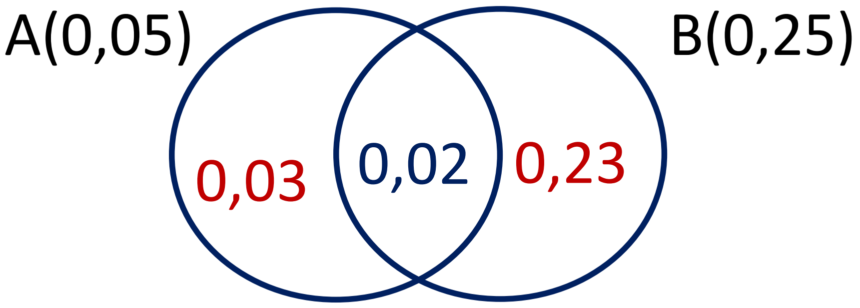
$P(A) = 0{,}05$; $P(B) = 0{,}25$; $P(A \cup B) = 0{,}28$

Se cumple: $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$0{,}28 = 0{,}05 + 0{,}25 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0{,}02$$

Gráfico:



Piden: $P_{(solo\ A\ ó\ solo\ B)} = 0{,}03 + 0{,}23$

$P_{(solo\ A\ ó\ solo\ B)} = 0{,}26$

Clave: C

16. Un jugador lanza 2 monedas al aire. Si sale 2 caras gana S/ 6, si sale sólo una cara gana S/ 2, pero si sale 2 sellos pierde S/ 3. Calcule la ganancia esperada de dicho jugador.

A) 1,0 **B) 1,25** **C) 1,5**

D) 1,75 **E) 2,0**

Resolución

$E: Se\ lanzan\ 2\ monedas$

$\Omega = \{CC\ ;CS\ ;SC\ ;SS\}$

$X \rightarrow$ S/6 S/2 S/2 –S/3

X	S/6	S/2	-S/3
$P_{(x)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Piden: $E_{(X)} = \sum X_i * P_{(X_i)}$

$$E(x) = 6\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{2}{4}\right) + (-3)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$E(x) = \frac{7}{4} = 1{,}75$$

Clave: D

PROBLEMAS

17. Se sabe que los sueldos, en dólares, en una región es una variable aleatoria x, cuya distribución de probabilidades es:

X	100	200	300	400	500
$P_{(x)}$	0,1	0,2	a	b	0,1

Si el valor esperado de los sueldos de dicha región es 300, calcular la probabilidad de que un sueldo escogido al azar sea menor de 400 dólares.

A) 0,60 **B) 0,65** **C) 0,70**
D) 0,72 **E) 0,80**

PROBLEMAS

Resolución

Se tiene:

X	100	200	300	400	500
$P_{(x)}$	0,1	0,2	a	b	0,1

Se cumple: $\sum P_{(x)} = 1 \rightarrow$ a + b = 0,6 $\ldots..(1)$

Dato:

$$E_{(x)} = 300 \rightarrow \sum x_i\, P_{(x_i)} = 300$$

10 + 40 + 300a + 400b + 50 = 300

300a + 400b = 200 $\ldots..(2)$

$De\ (1)\ y\ (2) \quad a = 0{,}4\ ;\ b = 0{,}2$

Piden:

P(x<400) = P(x=100)+P(x=200)+P(x=300)

P(x<400) = 0,1 + 0,2 + 0,4

P(x<400) = 0,7

Clave: C

18. Una compañía ABC compra diariamente pescados en un puerto a S/ 3 el kg y luego lo vende a S/ 4,5 el kg. El pescado no vendido durante el día se vende al final del día a S/ 1 el kg. Calcular el valor esperado de la ganancia diaria de la compañía ABC, sabiendo que diariamente compra 1 800 kg de pescado.

Demanda diaria (x)	500	1000	2000
Probabilidad $P_{(x)}$	0.5k	k	k

A) 650 **B) 670** **C) 690**
D) 700 **E) 750**

PROBLEMAS

Resolución

Se tiene:

Demanda diaria (x)	500	1000	2000
Probabilidad $\boldsymbol{P_{(x)}}$	0.5k	k	k

Se cumple: $\sum P_{(x)} = 1$ → 2,5k = 1 → **k = 0,4**

Dato: Compra diariamente a S/3 c/kg de pescado

Si lo vende a S/4,5 c/kg → Ganaría: S/1,5 por c/kg

Si lo vende a S/1 c/kg → Perdería : S/2 por c/kg

Como compra 1800 kg de pescado

Demanda 500 kg → G_1 = 1,5(500)-2(1300)= - S/1850

Demanda 1000 kg → G_2 = 1,5(1000)-2(800)=- S/100

Demanda 2000 kg → G_3 = 1,5(1800) = S/2700

Luego:

G	-S/1850	-S/100	S/2700
$\boldsymbol{P_{(G)}}$	0,2	0,4	0,4

Piden: $E_{(G)} = \sum G * P_{(G)}$

$$E_{(G)} = (-1850)(0{,}2) + (-100)(0{,}4) + (2700)(0{,}4)$$

$$E_{(G)} = -370 - 40 + 1080$$

$$E_{(G)} = S/670$$

Clave: B

PROBLEMAS

19. Sea "x" el tiempo de supervivencia, en segundos, después de un diagnóstico de una enfermedad donde la función de densidad es :

$$F(x) = K * \left(\frac{a}{b}\right)^{x} \; ; x = 1, 2, 3, 4, \ldots \ldots \ldots$$

siendo a y b enteros (a < b) ; además :

$$P(x < 3) = \frac{11}{36}$$

Calcule P(x = 10)

A) 0,012 **B) 0,024** **C) 0,032**
D) 0,124 **E) 0,345**

PROBLEMAS

Resolución

Función de densidad o probabilidad:

$$\mathrm{P}(x) = K * \left(\frac{a}{b}\right)^{x}\ ; x = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots$$

$$a; b \in \mathbb{Z}\ \ (a < b)$$

$$P(x < 3) = \frac{11}{36} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Se cumple:

$$\sum P(x) = 1 \rightarrow K\left[\frac{a}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)^{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^{3} + \ldots\right] = 1$$

$$K\left[\frac{\frac{a}{b}}{1-\frac{a}{b}}\right] = 1\ ; si:\ y = \frac{a}{b} \rightarrow K\left[\frac{y}{1-y}\right] = 1 \ldots(2)$$

$$De\ (1) \quad P(x=1) + P(x=2) = \frac{11}{36}$$

$$k\left(\frac{a}{b}\right) + k\left(\frac{a}{b}\right)^{2} = \frac{11}{36}$$

$$K[y + y^{2}] = \frac{11}{36} \qquad \ldots(3)$$

$$De\ (2)\ y\ (3)$$

$$\mathrm{y} = \frac{5}{6} \rightarrow k = \frac{1}{5}; \qquad \frac{a}{b} = \frac{5}{6}$$

Luego: $\mathrm{P}(x) = \frac{1}{5} * \left(\frac{5}{6}\right)^{x}$

Piden: $\mathrm{P}(x = 10) = \frac{1}{5} * \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$

$$\mathrm{P}(x = 10) = 0{,}032$$

Clave: C

PROBLEMAS

20. Se tiene una moneda cargada en la que la probabilidad de sacar cara en un lanzamiento es el doble de sacar sello. Consideremos el experimento de lanzar esta moneda tres veces seguida y anotar C si sale cara y S si sale sello. Sea X la variable aleatoria definida como la diferencia entre el número de caras menos el número de sellos obtenidos en este experimento. Hallar la esperanza matemática de dicha variable X.

A) -1/8 **B) 1/8** **C) -3/8**

D) 3/8 **E) 0**

PROBLEMAS

Resolución

Moneda cargada: $P_{(C)} = 2P_{(S)}$

$P_{(C)} + P_{(S)} = 1$

$P_{(C)} = 2/3$

$P_{(S)} = 1/3$

Casos posibles:

CCC $\rightarrow$ X = 3 ; P = 8/27
CCS $\rightarrow$ X = 1 ; P = 4/27
CSC $\rightarrow$ X = 1 ; P = 4/27
CSS $\rightarrow$ X = -1 ; P = 2/27
SCC $\rightarrow$ X = 1 ; P = 4/27
SCS $\rightarrow$ X = -1 ; P = 2/27
SSC $\rightarrow$ X = -1 ; P = 2/27
SSS $\rightarrow$ X = -3 ; P = 1/27

X	3	1	-1	-3
$P_{(X)}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

Piden: $E_{(X)} = \sum x_{(i)} * P_{(X_{(i)})}$

$$E_{(X)} = \frac{24}{27} + \frac{12}{27} - \frac{6}{27} - \frac{3}{27} \rightarrow E_{(X)} = 1$$

Rpta: 1

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS